Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME

2022

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques MP - PC - PSI (3h)

■ PARTIE I : UNE INTÉGRALE DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

1°) Posons $t = u\sqrt{\pi a}$ dans l'intégrale convergente $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

Cette l'application $u \mapsto u\sqrt{\pi a}$ réalise un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et donc ce changement de variables ne modifie ni l'existence ni la valeur de l'intégrale, de sorte qu'on a :

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Il en résulte que l'intégrale $J(0)$ converge et vaut :

$$J(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

2.a) L'application $t \mapsto e^{-\pi a t^2} e^{i\pi x t}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et on a : $\left|e^{-\pi a t^2} e^{i\pi x t}\right| = e^{-\pi a t^2} \underset{\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

La fonction continue $t \mapsto e^{-\pi a t^2} e^{i\pi x t}$ est donc intégrable au voisinage de $\pm\infty$, et donc sur $\mathbb{R}$.
On peut donc poser pour tout réel x :

$$J(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a t^2} e^{i\pi x t}\,\mathrm{d}t.$$

2.b) Cette fonction $(t, x) \mapsto e^{-\pi a t^2} e^{i\pi x t}$ est de classe C^1 par rapport à la variable x et on a :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-\pi a t^2} e^{i\pi x t}\right) = i\pi t\, e^{-\pi a t^2} e^{i\pi x t}.$$

Cette fonction est continue en chacune de ses variables, et : $\left|i\pi t\, e^{-\pi a t^2} e^{i\pi x t}\right| = |\pi t|\, e^{-\pi a t^2} \underset{\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

La fonction continue $t \mapsto i\pi t\, e^{-\pi a t^2} e^{i\pi x t}$ est donc intégrable au voisinage de $\pm\infty$, et donc sur $\mathbb{R}$.
La fonction J est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$J'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a t^2}\, i\pi t\, e^{i\pi x t}\,\mathrm{d}t.$$

c) Une intégration par parties dans l'intégrale $J'(x)$ donne alors :

$$J'(x) = -\frac{i}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} -2\pi a t\, e^{-\pi a t^2} e^{i\pi x t}\,\mathrm{d}t = -\frac{i}{2a}\Big[e^{-\pi a t^2} e^{i\pi x t}\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{\pi x}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a t^2} e^{i\pi x t}\,\mathrm{d}t.$$

Cette intégration a un sens puisque le crochet est nul (car $\lim_{\pm\infty}\left|e^{-\pi a t^2} e^{i\pi x t}\right| = \lim_{\pm\infty} e^{-\pi a t^2} = 0$), et la dernière intégrale n'est autre que $J(x)$, de sorte qu'on a obtenu :

$$J'(x) + \frac{\pi x}{2a} J(x) = 0.$$

d) Cette relation équivaut à : $\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{\pi x^2}{4a}} J(x)\right) = 0$, autrement dit à : $e^{\frac{\pi x^2}{4a}} J(x) = C$ avec $C \in \mathbb{C}$.

Et par évaluation en 0, on voit que cette constante C vaut : $C = J(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a t^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{a}}$, d'où :

$$J(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a t^2}\, e^{i \pi x t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\, e^{-\frac{\pi x^2}{4a}}.$$

En exploitant la formule d'Euler, on obtient enfin la convergence et la valeur de l'intégrale $K(x)$:

$$K(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a t^2} \cos(\pi x t)\, dt = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a t^2}\, e^{i \pi x t}\, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a t^2}\, e^{-i \pi x t}\, dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,(J(x) + J(-x)) = J(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\, e^{-\frac{\pi x^2}{4a}}.$$

■ PARTIE II : ÉTUDE DE LA SOMME D'UNE SÉRIE

3°) *Etude d'une fonction auxiliaire*

a) Comme $g(x) = g(0) + x\, g'(0) + o(x)$ et $\sin(\pi x) = \pi x + o(x)$ au voisinage de 0, on a donc :

$$h(x) \underset{x \to 0}{=} \frac{g(x) - g(0)}{\sin(\pi x)} \underset{x \to 0}{=} \frac{x\, g'(0) + o(x)}{\pi x + o(x)} \underset{x \to 0}{=} \frac{g'(0) + o(1)}{\pi + o(1)}.$$

Il en résulte que : $L = \lim_{x \to 0} h(x) = \frac{g'(0)}{\pi}$ et on prolonge h par continuité en posant $h(0) = \frac{g'(0)}{\pi}$.

b) Pour tout réel x appartenant à $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$, on

$$h'(x) = \frac{g'(x) \sin(\pi x) - \pi (g(x) - g(0)) \cos(\pi x)}{\sin^2(\pi x)}.$$

Comme $g(x) = g(0) + x\, g'(0) + \frac{x^2}{2} g''(0) + o\left(x^2\right)$ et $g'(x) = g'(0) + x\, g''(0) + o(x)$, on a en effectuant le développement limité suivant des numérateur et dénominateur :

$$h'(x) = \frac{\left(g'(0) + x\, g''(0) + o(x)\right)\left(\pi x + o\left(x^2\right)\right) - \pi\left(x\, g'(0) + \frac{x^2}{2} g''(0) + o\left(x^2\right)\right)(1 + o(x))}{\pi^2 x^2 + o\left(x^2\right)}$$

$$= \frac{\left(\pi x\, g'(0) + \pi x^2 g''(0) + o\left(x^2\right)\right) - \left(\pi x\, g'(0) + \frac{\pi x^2}{2} g''(0) + o\left(x^2\right)\right)}{\pi^2 x^2 + o\left(x^2\right)}.$$

Il en résulte finalement :

$$h'(x) = \frac{\frac{\pi x^2}{2} g''(0) + o\left(x^2\right)}{\pi^2 x^2 + o\left(x^2\right)} = \frac{\frac{\pi}{2} g''(0) + o(1)}{\pi^2 + o(1)}.$$

Il en résulte que : $L' = \lim_{x \to 0} h'(x) = \frac{g''(0)}{2\pi}$.

c) La fonction h (prolongée en 0) est continue sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, de classe C^1 sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\}$, et h' a pour limite $L' = \lim_{x \to 0} h'(x) = \frac{g''(0)}{2\pi}$ en 0. D'après le théorème de prolongement des fonctions C^1, on en déduit que h est de classe C^1 sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et que $h'(0) = \frac{g''(0)}{2\pi}$.

4°) *Calcul d'une somme trigonométrique*

a) Rappelons d'abord qu'on a : $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b)$.
La formule proposée est vraie pour $p = 1$ car elle s'écrit : $(1 + 2\cos(2\pi x))\sin(\pi x) = \sin(3\pi x)$, soit encore d'après la formule précédente : $\sin(\pi x) + (\sin(3\pi x) - \sin(\pi x)) = \sin(3\pi x)$.
Supposons par récurrence cette formule vraie au rang $p - 1$:

$$1 + 2\sum_{n=1}^{p-1} \cos(2\pi n x) = \frac{\sin((2p-1)\pi x)}{\sin(\pi x)}.$$

Vérifions la maintenant au rang p en exploitant la même formule de trigonométrie :

$$\begin{aligned} 1 + 2\sum_{n=1}^{p} \cos(2\pi n x) &= \frac{\sin((2p-1)\pi x)}{\sin(\pi x)} + 2\cos(2\pi p x) \\ &= \frac{\sin((2p-1)\pi x) + 2\sin(\pi x)\cos(2\pi p x)}{\sin(\pi x)} = \frac{\sin((2p+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}. \end{aligned}$$

Et cette égalité se prolonge bien par continuité en 0 puisqu'on a :

$$\lim_{x \to 0}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{p} \cos(2\pi n x)\right) = 2p + 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin((2p+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} = \lim_{x \to 0} \frac{(2p+1)\pi x}{\pi x} = 2p + 1.$$

b) En intégrant l'égalité ainsi obtenue sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, on obtient :

$$\int_{-1/2}^{+1/2} \frac{\sin((2p+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\,dx = \int_{-1/2}^{+1/2}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{p}\cos(2\pi n x)\right)dx = 1 + 2\sum_{n=1}^{p}\int_{-1/2}^{+1/2}\cos(2\pi n x)\,dx = 1.$$

On a en effet pour $n \geq 1$: $\int_{-1/2}^{+1/2} \cos(2\pi n x)\,dx = \left[\frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n}\right]_{-1/2}^{+1/2} = 0$.

5°) *Convergence et somme de la série* $\sum a_n(g)$

a) Par linéarité de l'intégrale, on a pour tout entier naturel $p \geq 1$:

$$a_0(g) + 2\sum_{n=1}^{p} a_n(g) = \int_{-1/2}^{+1/2} g(x)\left(1 + 2\sum_{n=1}^{p}\cos(2\pi n x)\right)dx.$$

On a alors compte tenu des résultats de la question 4 :

$$a_0(g) + 2\sum_{n=1}^{p} a_n(g) = \int_{-1/2}^{+1/2} g(x)\,\frac{\sin((2p+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\,dx \quad \text{et} \quad g(0) = \int_{-1/2}^{+1/2} g(0)\,\frac{\sin((2p+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\,dx.$$

Il en résulte que :

$$a_0(g) + 2\sum_{n=1}^{p} a_n(g) = g(0) + \int_{-1/2}^{+1/2} (g(x) - g(0))\,\frac{\sin((2p+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\,dx.$$

b) L'égalité précédente s'écrit aussi, avec les notations de la question 3 :

$$a_0(g) + 2\sum_{n=1}^{p} a_n(g) \ = \ g(0) + \int_{-1/2}^{+1/2} h(x)\sin((2\,p+1)\,\pi\,x)\,\mathrm{d}x.$$

Comme h est de classe C^1, cette dernière intégrale vaut, après intégration par parties :

$$\left[-h(x)\,\frac{\cos((2\,p+1)\,\pi\,x)}{(2\,p+1)\,\pi}\right]_{-1/2}^{+1/2} + \frac{1}{(2\,p+1)\,\pi}\int_{-1/2}^{+1/2} h'(x)\cos((2\,p+1)\,\pi\,x)\,\mathrm{d}x.$$

Le crochet est nul puisque : $\cos\left((2\,p+1)\,\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(p\,\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$, et on a donc :

$$a_0(g) + 2\sum_{n=1}^{p} a_n(g) \ = \ g(0) + \frac{1}{(2\,p+1)\,\pi}\int_{-1/2}^{+1/2} h'(x)\cos((2\,p+1)\,\pi\,x)\,\mathrm{d}x.$$

L'inégalité de la moyenne montre alors que cette dernière intégrale est bornée :

$$\left|\int_{-1/2}^{+1/2} h'(x)\cos((2\,p+1)\,\pi\,x)\,\mathrm{d}x\right| \ \le \ \int_{-1/2}^{+1/2} |h'(x)\cos((2\,p+1)\,\pi\,x)|\,\mathrm{d}x \ \le \ \int_{-1/2}^{+1/2} |h'(x)|\,\mathrm{d}x$$

On en déduit que : $\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{(2\,p+1)\,\pi}\int_{-1/2}^{+1/2} h'(x)\cos((2\,p+1)\,\pi\,x)\,\mathrm{d}x = 0$, et on a finalement :

$$\lim_{p\to+\infty}\left(a_0(g) + 2\sum_{n=1}^{p} a_n(g)\right) \ = \ g(0) \qquad \text{ou} \qquad a_0(g) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(g) \ = \ g(0).$$

■ PARTIE III : FORMULE SOMMATOIRE DE POISSON

6°) *Propriétés de la fonction g_a*

a) Pour tout réel x, la série $\sum_{k=1}^{k=+\infty} f_a(x+k)$ converge d'après la règle d'Alembert car :

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{e^{-\pi\,a\,(x+k+1)^2}}{e^{-\pi\,a\,(x+k)^2}} \ = \ \lim_{k\to+\infty} e^{-\pi\,a\left[(x+k+1)^2-(x+k)^2\right]} \ = \ \lim_{k\to+\infty} e^{-(2\,x+1)\,\pi\,a}\,e^{-2\,a\,\pi\,k} \ = \ 0.$$

De même, pour tout réel x, la série $\sum_{k=1}^{k=+\infty} f_a(x-k)$ converge d'après la règle d'Alembert car :

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{e^{-\pi\,a\,(x-k-1)^2}}{e^{-\pi\,a\,(x-k)^2}} \ = \ \lim_{k\to+\infty} e^{-\pi\,a\left[(x-k-1)^2-(x-k)^2\right]} \ = \ \lim_{k\to+\infty} e^{(2\,x-1)\,\pi\,a}\,e^{-2\,a\,\pi\,k} \ = \ 0.$$

La série $\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} f_a(x+k) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x+k) + f_a(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x+k)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction g_a est 1-périodique puisqu'on a pour tout réel x et tout entier naturel p :

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} f_a(x+1+k) \ = \ \sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x-k+1) + f_a(x+1) + \sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x+k+1).$$

En posant $k' = k-1$ dans la première somme et $k' = k+1$ dans la dernière somme, on a :

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} f_a(x+1+k) \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} f_a(x-k) + f_a(x+1) + \sum_{k=2}^{+\infty} f_a(x+k)$$

$$= \ \sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x-k) + f_a(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} f_a(x+k) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} f_a(x+k)\,.$$

Ainsi, pour tout réel x, on a bien : $g_a(x+1) = g_a(x)$.

c) Pour tout réel $A > 0$, la série $\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\pi a k^2} e^{2 k a \pi A}$ converge d'après la règle d'Alembert car :

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{e^{-\pi a(k+1)^2} e^{2(k+1) a \pi A}}{e^{-\pi a k^2} e^{2 k a \pi A}} = \lim_{k \to +\infty} e^{2 a \pi A} e^{-(2k+1)\pi a} = 0.$$

Sur le segment $[-A, A]$, on a : $e^{-\pi x^2} \leq 1$ et $e^{\pm 2 k a \pi x} \leq e^{2 k a \pi A}$, et par conséquent :

- $\forall x \in [-A, A]$, $0 \leq f_a(x+k) = e^{-\pi a (x+k)^2} = e^{-\pi a x^2} e^{-2\pi a k x} e^{-\pi a k^2} \leq e^{2\pi a k A} e^{-\pi a k^2}$.
- $\forall x \in [-A, A]$, $0 \leq f_a(x-k) = e^{-\pi a (x-k)^2} = e^{-\pi a x^2} e^{2\pi a k x} e^{-\pi a k^2} \leq e^{2\pi a k A} e^{-\pi a k^2}$.

Comme la série $\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\pi a k^2} e^{2 k a \pi A}$ converge, les deux séries $\sum_{k=1}^{k=+\infty} f_a(x-k)$ et $\sum_{k=1}^{k=+\infty} f_a(x+k)$ convergent donc normalement (et uniformément) sur tout segment $[-A, A]$. De plus, elles sont constituées de fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On en déduit que leurs sommes sont donc continues sur tout segment $[-A, A]$, et donc continues sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que la fonction g_a est continue sur $\mathbb{R}$.

d) Appliquons le théorème de dérivation des séries de fonctions à $\sum_{k=1}^{k=+\infty} f_a(x-k)$ et $\sum_{k=1}^{k=+\infty} f_a(x+k)$ en remarquant tout d'abord que les fonctions f_a sont de classe C^1 (et même C^∞) sur $\mathbb{R}$.

Les séries $\sum_{k=1}^{k=+\infty} f_a(x-k)$ et $\sum_{k=1}^{k=+\infty} f_a(x+k)$ convergent simplement sur $\mathbb{R}$ comme on l'a établi.

Les séries-dérivées $\sum_{k=1}^{k=+\infty} f_a'(x-k)$ et $\sum_{k=1}^{k=+\infty} f_a'(x+k)$ convergent normalement sur tout $[-A, A]$:

$$|f_a'(x+k)| = \left|-2\pi a(x+k) e^{-\pi a(x+k)^2}\right| \leq 2\pi a(k+A) e^{2\pi a k A} e^{-\pi a k^2}.$$

$$|f_a'(x-k)| = \left|-2\pi a(x-k) e^{-\pi a(x-k)^2}\right| \leq 2\pi a(k+A) e^{2\pi a k A} e^{-\pi a k^2}.$$

La règle d'Alembert permet aussi de vérifier la convergence de la série $\sum_{k=1}^{+\infty} (k+A) e^{2\pi a k A} e^{-\pi a k^2}$ et les deux séries $\sum_{k=1}^{k=+\infty} f_a'(x-k)$ et $\sum_{k=1}^{k=+\infty} f_a'(x+k)$ convergent normalement (et uniformément) sur tout segment $[-A, A]$. Les sommes des séries de fonctions $\sum_{k=1}^{k=+\infty} f_a(x-k)$ et $\sum_{k=1}^{k=+\infty} f_a(x+k)$ sont donc de classe C^1 et dérivables terme à terme sur tout segment $[-A, A]$, donc sur $\mathbb{R}$.

Il en résulte que g_a est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et on a : $g_a'(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} f_a'(x)$.

Un raisonnement analogue montre que g_a est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, et on a : $g_a''(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} f_a''(x)$.

7°) *La formule sommatoire de Poisson et application*

a) D'après la définition de $a_n(g_a)$, on a :

$$a_n(g_a) = \int_{-1/2}^{+1/2} g_a(x) \cos(2\pi n x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1/2}^{+1/2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} f_a(x+k) \cos(2\pi n x)\,\mathrm{d}x.$$

On a vu que les deux séries de fonctions continues $\sum_{k=1}^{k=+\infty} f_a(x-k)$ et $\sum_{k=1}^{k=+\infty} f_a(x+k)$ convergent normalement (donc uniformément) sur tout segment $[-A, A]$, et donc sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Il en va de même des séries $\sum_{k=1}^{k=+\infty} f_a(x-k)\cos(2\pi n x)$ et $\sum_{k=1}^{k=+\infty} f_a(x+k)\cos(2\pi n x)$ car on a pour tout réel x : $|f_a(x)\cos(2\pi n x)| \leq f_a(x)$, et on peut donc permuter les symboles $\sum$ et $\int$, d'où :

$$a_n(g_a) = \int_{-1/2}^{+1/2} g_a(x) \cos(2\pi n x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{-1/2}^{+1/2} f_a(x+k) \cos(2\pi n x)\,\mathrm{d}x.$$

b) En posant $t = x + k$ dans l'intégrale, il vient :

$$a_n(g_a) = \int_{-1/2}^{+1/2} g_a(x)\cos(2\pi n x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{k-1/2}^{k+1/2} f_a(t)\cos(2\pi n(t-k)\,\mathrm{d}t.$$

Et par 2π-périodicité du cosinus, on a finalement :

$$a_n(g_a) = \int_{-1/2}^{+1/2} g_a(x)\cos(2\pi n x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{k-1/2}^{k+1/2} f_a(t)\cos(2\pi n t)\,\mathrm{d}t.$$

Ce qui signifie encore, en exploitant la relation de Chasles :

$$a_n(g_a) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{k-1/2}^{k+1/2} f_a(t)\cos(2\pi n t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t)\cos(2\pi n t)\,\mathrm{d}t$$

puisque la fonction $t \mapsto f_a(t)\cos(2\pi n t) = e^{-\pi a t^2}\cos(2\pi n t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après I.
Et les résultats de la partie I donnent de plus :

$$a_n(g_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a t^2}\cos(2\pi n t)\,\mathrm{d}t = K(2n) = \frac{1}{\sqrt{a}}\, e^{-\frac{\pi n^2}{a}}.$$

c) Le résultat final de la partie II donne maintenant :

$$g_a(0) = a_0(g_a) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(g_a) = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{2}{\sqrt{a}}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{a}}.$$

Comme $g_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} f_a(t+k) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{-\pi a(t+k)^2}$, on a en remplaçant $g_a(0)$ par son expression :

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{-\pi a k^2} = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\pi a k^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{2}{\sqrt{a}}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{a}}.$$

d) Pour tout $a > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n \leq n^2$ et donc : $e^{-\frac{\pi n^2}{a}} \leq e^{-\frac{\pi n}{a}}$, ce qui conduit à :

$$0 \leq \frac{2}{\sqrt{a}}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{a}} \leq \frac{2}{\sqrt{a}}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n}{a}} = \frac{2}{\sqrt{a}}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-\frac{\pi}{a}}\right)^n = \frac{2}{\sqrt{a}}\,\frac{e^{-\frac{\pi}{a}}}{1-e^{-\frac{\pi}{a}}}.$$

Et comme $\lim_{x\to+\infty} x^{1/2} e^{-x} = 0$, on a par conséquent lorsque a tend vers 0 :

$$\frac{2}{\sqrt{a}}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{a}} = o(1).$$

En exploitant la formule obtenue en (c), on obtient donc :

$$1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi a n^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{2}{\sqrt{a}}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + o(1).$$

■ PARTIE IV : APPLICATION À L'ÉTUDE D'UNE SÉRIE ENTIÈRE

8°) On considère la série entière suivante :

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} x^{k^2} = \frac{1}{2} + x + x^4 + x^9 + x^{16} + \ldots.$$

8.a) Le rayon de convergence de cette série entière est clairement égal à 1 car :
- pour $x = \pm 1$, elle diverge grossièrement, d'où $R \leq 1$.
- pour $|x| < 1$, elle converge absolument car $|x|^{k^2} \leq |x|^k$ et $\sum |x|^k$ converge, d'où $R \geq 1$.

Ainsi, $R = 1$ et S est définie sur $]-1, 1[$.

8.b) En appliquant le résultat de 7.d) avec $a = \frac{|\ln(x)|}{\pi} = -\frac{\ln(x)}{\pi}$ où $0 < x < 1$, on a :

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} x^{k^2} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-|\ln(x)|\, k^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{|\ln(x)|}} + o(1).$$

On sait que $\frac{1}{\sqrt{|\ln(x)|}} = \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \underset{1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, et on a de plus en posant $t = 1 - x$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} = \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{-\ln(1-t)}} = \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t + \frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)}}.$$

En factorisant $\frac{1}{\sqrt{t}}$ et en effectuant un développement limité quand t tend vers 0, il vient :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} = \frac{1}{\sqrt{t}}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + t/2 + o(t)}}\right] = \frac{1}{\sqrt{t}}\left[1 - \left(1 - \frac{t}{4} + o(t)\right)\right] \underset{0}{\sim} \frac{\sqrt{t}}{4}.$$

Ainsi donc, on a $\lim_{x \to 1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}}\right) = 0$, ce qui donne quand x tend vers 1 :

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} x^{k^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{|\ln(x)|}} + o(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}} + o(1).$$

8.c) Comme x^4 tend vers 1 lorsque x tend vers 1, on a donc : $S\left(x^4\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x^4}} + o(1)$.

Et compte tenu de $1 - x^4 = (1-x)\left(1 + x + x^2 + x^3\right) \sim 4\,(1-x)$, on a : $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x^4}} \underset{1}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{1-x}}$.

En posant $t = 1 - x$, on étudie par conséquent :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{1-x}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x^4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{1-x}}\left[1 - \frac{2}{\sqrt{1 + x + x^2 + x^3}}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{t}}\left[1 - \frac{2}{\sqrt{4 - 6\,t + o(t)}}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{t}}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - 3\,t/2 + o(t)}}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{t}}\left[1 - \left(1 + \frac{3}{4}\,t + o(t)\right)\right] \sim -\frac{3\sqrt{\pi\, t}}{16}.$$

Ainsi, cette différence tend vers 0 quand t tend vers 0, donc quand x tend vers 1, ce qui établit que :

$$S\left(x^4\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{1-x}} + o(1).$$

8.d) Comme les entiers k et k^2 ont même parité, on observe que : $(-x)^{k^2} = (-1)^{k^2} x^{k^2} = (-1)^k x^{k^2}$.

On a maintenant pour $|x| < 1$:

$$S(x) + S(-x) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(x^{k^2} + (-x)^{k^2}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(x^{k^2} + (-1)^k x^{k^2}\right).$$

Pour k impair, la somme $x^{k^2} + (-1)^k x^{k^2}$ est donc nulle, et il ne reste que les termes où k est pair :

$$S(x) + S(-x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} x^{(2k)^2} = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} x^{4k^2} = 2\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(x^4\right)^{k^2}\right) = 2\,S\left(x^4\right).$$

On a alors quand x tend vers 1, et donc quand $-x$ tend vers -1 :

$$\lim_{x\to 1} S(-x) = \lim_{x\to 1} \left(2\,S\left(x^4\right) - S(x)\right) = 0$$

puisque les résultats précédents montrent en effet que : $2\,S\left(x^4\right) - S(x) = o(1)$.

La limite de $S(-x)$ quand x tend vers 1, c'est à dire la limite de $S(x)$ quand x tend vers -1, est nulle.
